TEORÍA DE LA COMUNICACIÓN

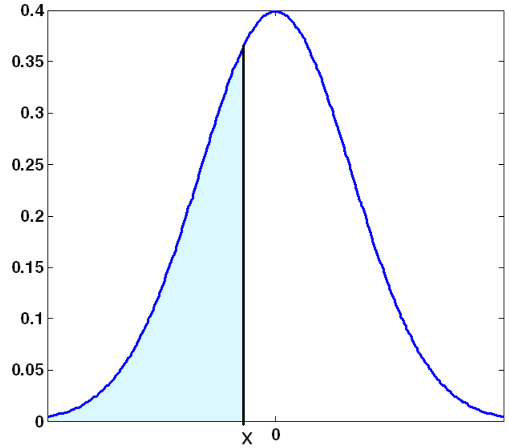
Integrales de gaussianas (I)

• El cálculo de probabilidades asociado a distribuciones normales, que será muy importante en esta asignatura, requiere la integración de gaussianas. La integral de una gaussiana no se puede expresar en términos de funciones elementales, por lo que en la práctica es común recurrir a funciones tabuladas o aproximaciones en forma de serie para el cálculo de dichas integrales.

• Podemos encontrar tablas donde venga tabulado el valor de la **función de distribución de una normal** de media 0 y varianza 1 y que notaremos como ***F* (*x*)**. Esta función permite calcular probabilidades de distribuciones normales de cualquier media y varianza si empleamos un cambio de variable adecuado (tipificación de la variable).

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$$\Pr(X \leq x) = F_X(x)$$

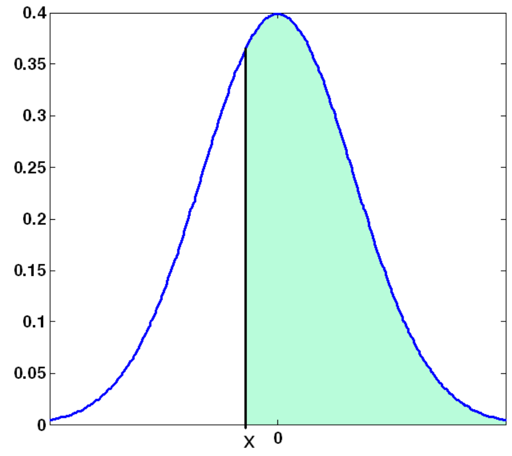


Integrales de gaussianas (II)

- Una función con muchísimo interés en esta asignatura es la llamada función ***Q*(*x*)**, es simplemente la función complementaria a la función de distribución normal de media 0 y varianza 1.

$$Q(x) = 1 - F(x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

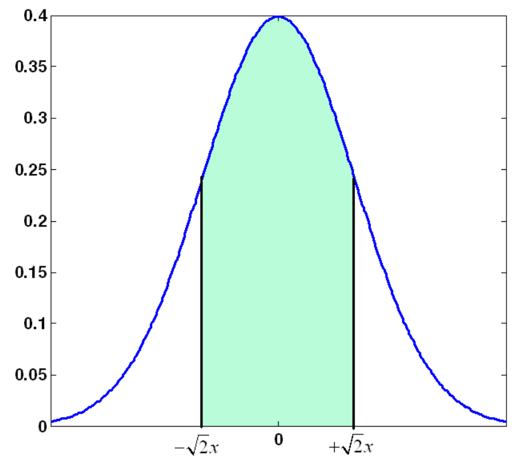
$$\Pr(X \geq x) = 1 - F_X(x) = Q(x)$$



- Otra función que permite el cálculo de probabilidades de distribuciones normales es la llamada función de error que notaremos por ***erf*(*x*)**

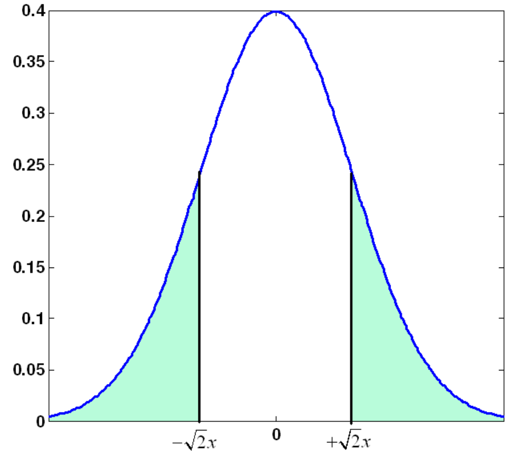
$$erf(x) = \int_{-\sqrt{2}x}^{+\sqrt{2}x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}} du = \int_0^x \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-u^2} du \quad x \geq 0$$

$$\Pr\left(-\sqrt{2}x \leq X \leq \sqrt{2}x\right) = \Pr\left(|X| \leq \sqrt{2}x\right) = erf(x) \quad x \geq 0$$



Integrales de gaussianas (III)

- Otra función con muchísimo interés en esta asignatura es la llamada función de error complementario ***erfc*(*x*)**, es la función complementaria de error.



$$erfc(x) = 1 - erf(x) \quad x \geq 0$$

$$erfc(x) = 1 - \int_{-\sqrt{2}x}^{+\sqrt{2}x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}} du = \int_{x}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-u^2} du \quad x \geq 0$$

$$\Pr\left(|X| \geq \sqrt{2}x\right) = erfc(x) \quad x \geq 0$$

- Las siguientes expresiones relacionan las distintas integrales gaussianas, se deja al lector que verifique dichas igualdades:

$$F(x) = Q(-x) = 1 - Q(x)$$

$$Q(x) = F(-x) = 1 - F(x)$$

$$Q(x) = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \quad x \geq 0$$

$$erfc(x) = 2 \cdot Q\left(\sqrt{2} \cdot x\right) \quad x \geq 0$$

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} erf\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \quad x \geq 0$$

$$erf(x) = 2 \cdot F\left(\sqrt{2}x\right) - 1 \quad x \geq 0$$

$$Q(x) = \frac{1}{2}\left(1 - erf\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right) \quad x \geq 0$$

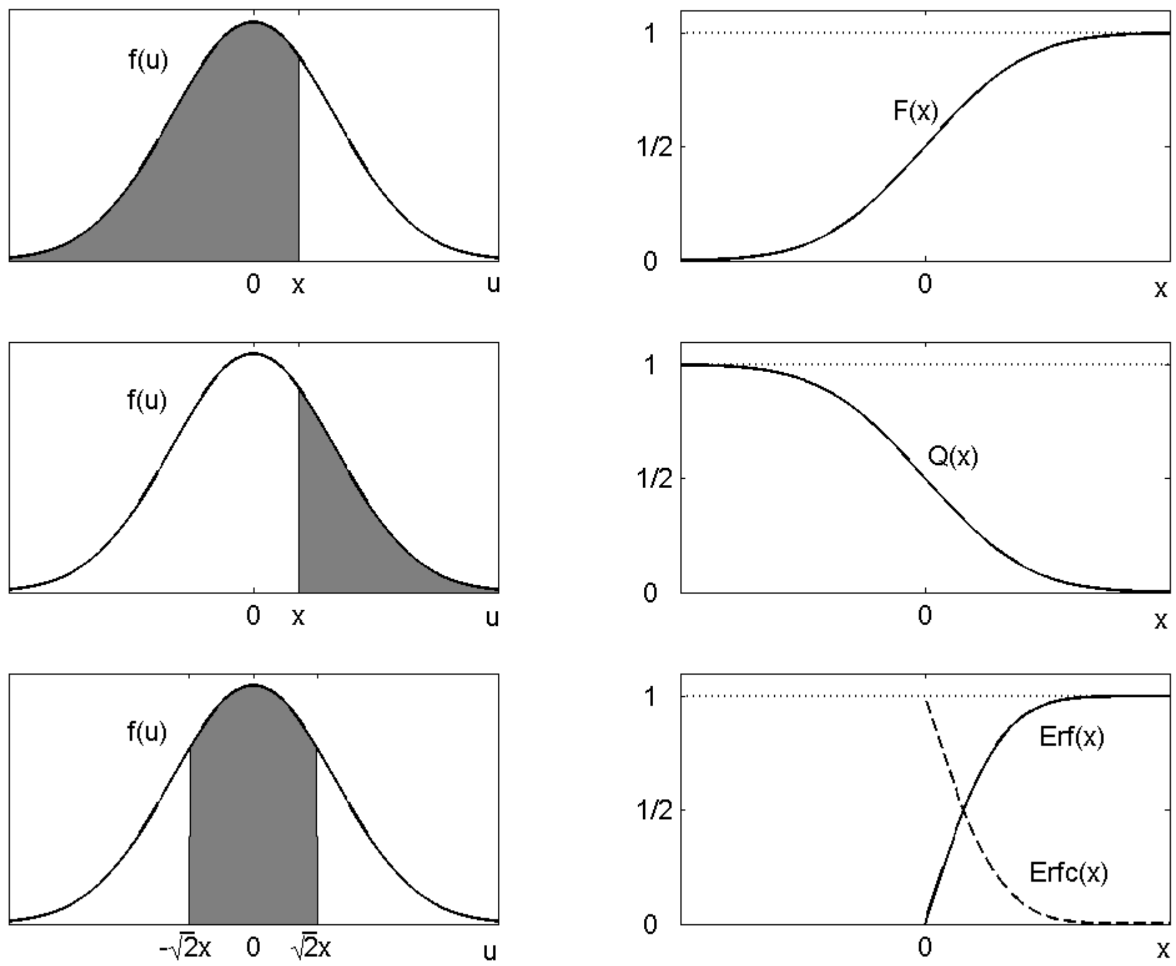
$$erf(x) = 1 - 2 \cdot Q\left(\sqrt{2} \cdot x\right) \quad x \geq 0$$

$$F(x) = 1 - \frac{1}{2} erfc\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \quad x \geq 0$$

$$erfc(x) = 2 - F\left(\sqrt{2} \cdot x\right) \quad x \geq 0$$

Integrales de gaussianas (IV)

TEORÍA DE LA COMUNICACIÓN



Representación gráfica de las funciones *f*(*x*), *F*(*x*), *Q*(*x*), *erf*(*x*) y *erfc*(*x*).

Integrales de gaussianas (V)

- Las funciones de integrales gaussianas que más emplearemos en esta asignatura son la función ***Q*(*x*)** y la función ***erfc*(*x*)**. A continuación buscamos expresiones de las mismas en términos de sumas de infinitas funciones elementales.

- La función ***Q*(*x*)** se puede aproximar por la siguiente expresión:

$$Q(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x\sqrt{2\pi}} \cdot \left[1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1\cdot 3}{x^4} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{x^6} + \ldots\right] \quad x \geq 0$$

- La función ***erfc*(*x*)** se puede aproximar por la siguiente expresión:

$$erfc(x) = \frac{e^{-x^2}}{x\cdot\sqrt{\pi}} \cdot \left[1 - \frac{1}{2\cdot x^2} + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot x^4} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot x^6} + \ldots\right] \quad x \geq 0$$

- Si el argumento de la función ***Q*(*x*)** es suficientemente pequeño, $x<<1$, es posible aproximarla mediante:

$$Q(x) \approx \frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad x \geq 0, x << 1$$

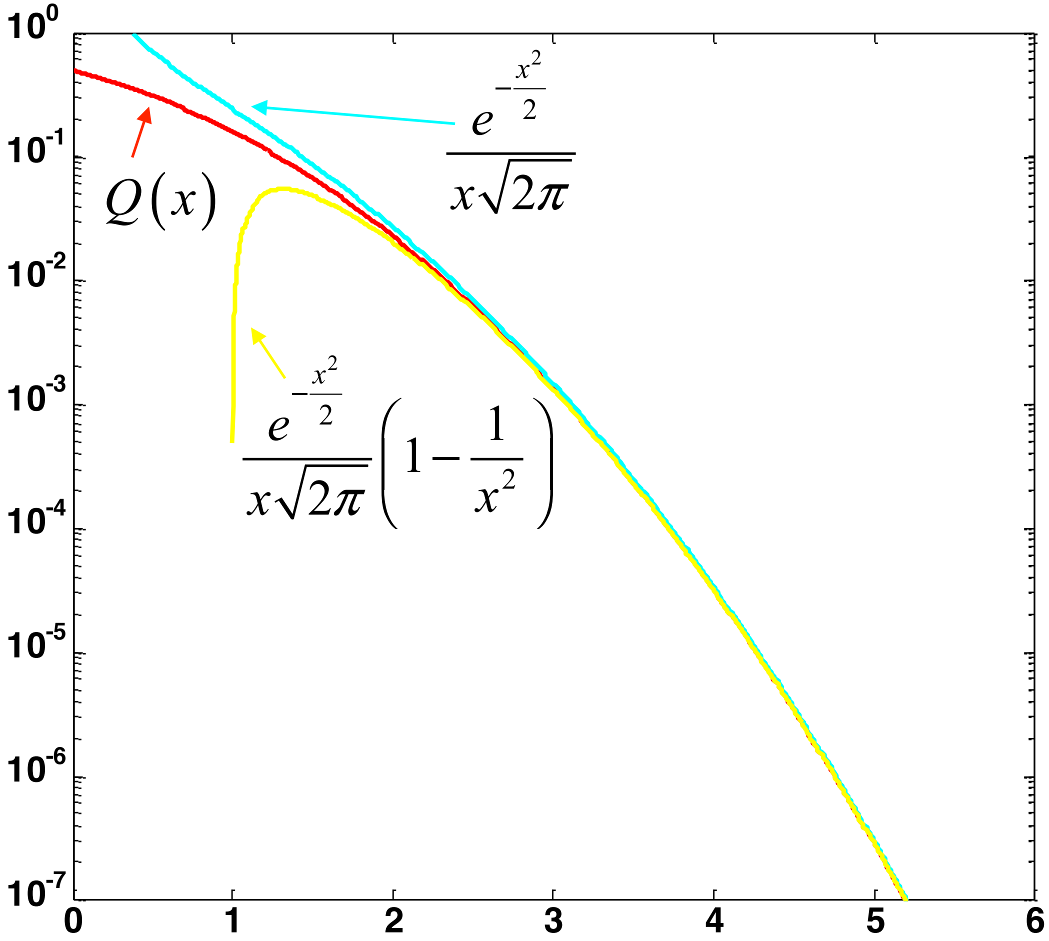
- Si el argumento de la función ***erfc*(*x*)** es suficientemente pequeño, $x<<1$, es posible aproximarla mediante:

$$erfc(x) \approx e^{-x^2} \quad x \geq 0, x << 1$$

Integrales de gaussianas (VI)

- Si el argumento de la función $\boldsymbol{Q(x)}$ es suficientemente grande, $x >> 1$, es posible acotar su valor mediante:

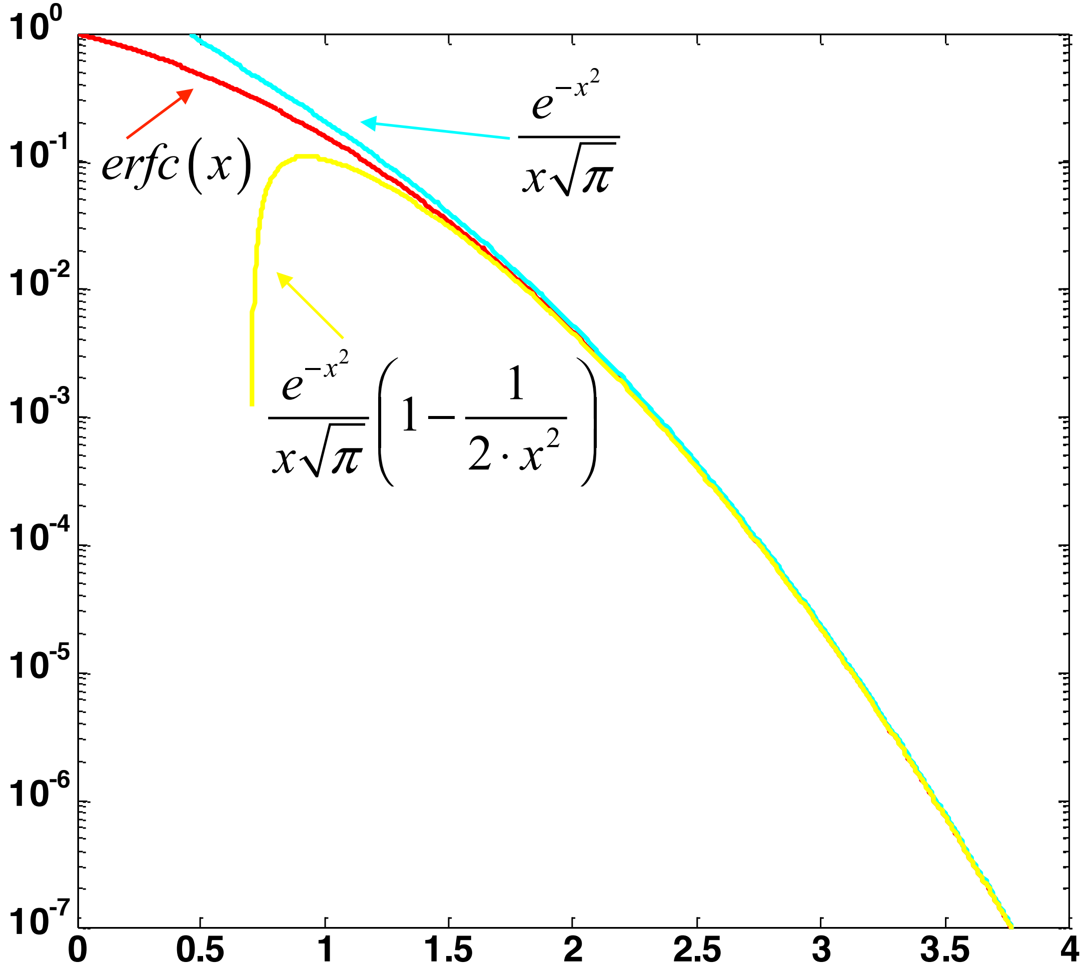
$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x\sqrt{2\pi}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right) < Q(x) < \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x\sqrt{2\pi}} \qquad x >> 1$$



Integrales de gaussianas (VII)

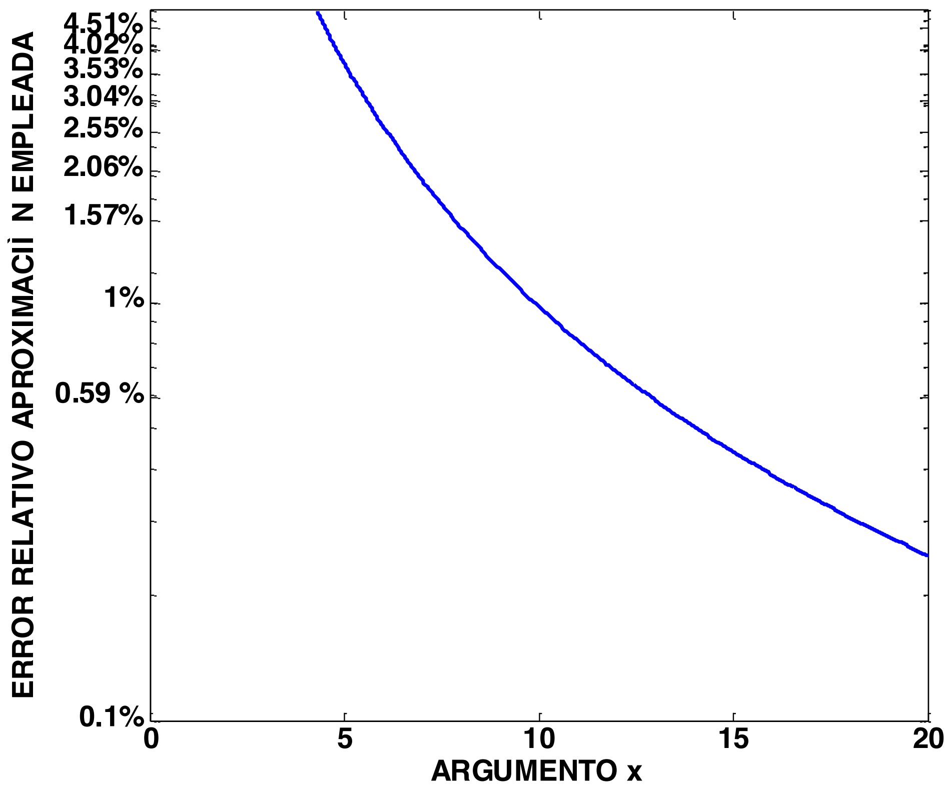
- Si el argumento de la función ***erfc*(*x*)** es suficientemente grande, $x >> 1$, es posible acotar su valor mediante:

$$\frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}}\left(1-\frac{1}{2\cdot x^2}\right) < erfc(x) < \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} \qquad x >> 1$$



Integrales de gaussianas (VIII)

• Si evaluamos el error que se comete al aproximar ***Q*(*x*)** mediante $Q(x) \approx \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x\sqrt{2\pi}}$



• Vemos que para valores ***x*** del argumento de la función ***Q*** mayores o iguales a **5** el error relativo cometido está por debajo del 5%.

TEORÍA DE LA COMUNICACIÓN